

Математика  
5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה  
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

הוראות

- а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут.  
б. Строение вопросника и ключ к оценке:  
В этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов.  
Раздел первый – алгебра и теория вероятности  
Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости  
Раздел третий – дифференциальное и интегральное  
исчисление полиномов, функций, содержащих корни,  
рациональных функций и тригонометрических функций  
Вы должны ответить на пять вопросов, по меньшей мере  
на один вопрос из каждого раздела –  $5 \times 20 = 100$  баллов.

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.  
ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.  
פרק ראשון – אלגברה והסתברות  
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור  
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי  
של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות  
רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות  
יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה  
אחת מכל פרק –  $20 \times 5 = 100$  נקודות.

- в. Разрешенный вспомогательный материал:  
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с  
калькулятором, который предоставляет возможности  
программирования, запрещается использовать  
эти возможности. Использование калькулятора  
с графическим дисплеем или возможностей  
программирования может привести к тому, что  
экзамен будет аннулирован.  
2. Листы с формулами (прилагаются).  
3. Двухязычный словарь.

- ג. חומר עזר מותר בשימוש:  
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש  
באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו  
אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי  
או באפשרויות התכנות במחשבון עלול  
לגרום לפסילת הבחינה.  
2. דפי נוסחאות (מצורפים).  
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

- г. Особые указания:  
1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его  
номер.  
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.  
Запишите в тетради этапы решения (также и в том  
случае, когда вычисления производились с помощью  
калькулятора). Объясните все свои действия,  
включая вычисления, подробно, ясно и по порядку.  
Недостаточно подробная запись решения может  
привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена  
или экзамен будет аннулирован.

- ד. הוראות מיוחדות:  
1. אין להעתיק את השאלה;  
יש לסמן את מספרה בלבד.  
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.  
יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,  
גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת  
מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל  
חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או  
לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

## Вопросы

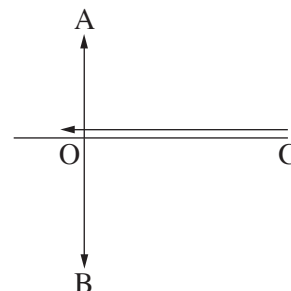
Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 20 баллов).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

### Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Пункт А находится к северу от пункта О, а пункт В находится к югу от пункта О.

Пункт С находится к востоку от пункта О на расстоянии 15 км от него, как показано на чертеже.



В воскресенье Ури вышел из пункта О в направлении пункта А.

В тот же самый момент времени Смадар выбежала из пункта С в направлении пункта О.

Скорость, с которой бежала Смадар, была в 3 раза больше скорости, с которой шел Ури.

Дано, что в момент времени, когда Ури достиг пункта А, расстояние по прямой между ним и Смадар составляло  $\sqrt{145}$  км.

Скорости Ури и Смадар были постоянными.

(\*) Найдите расстояние, которое прошел Ури, и расстояние, которое пробежала Смадар в воскресенье, если известно, что Смадар пробежала через пункт О.

В тот же день Боаз вышел из пункта О в направлении пункта В. Боаз вышел через 20 минут после того, как вышел Ури.

Скорость, с которой шел Боаз, была постоянной и была на 50% больше скорости, с которой шел Ури.

Когда Ури достиг пункта А, расстояние между ним и Боазом составляло 18 км. В этот момент времени Ури и Боаз остановились.

(\*) Найдите скорость, с которой шел Ури, и скорость, с которой шел Боаз.

В понедельник Ури и Боаз вышли одновременно. Каждый из них вышел из того пункта, в котором он остановился в воскресенье, и продолжал идти в том же направлении, что и в воскресенье. Боаз уменьшил скорость своей ходьбы на  $v$  км/час, а Ури увеличил скорость своей ходьбы на  $v$  км/час.

Оба остановились в тот момент времени, когда расстояние между ними было 24 км.

(\*) Найдите, сколько минут шел Ури в понедельник.

2. Дана арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$  в которой  $3n$  членов и разность которой  $d$ . Обозначим как  $S_n^*$  сумму  $n$  членов, находящихся в середине этой прогрессии.

(а) Докажите, что  $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$ .

Дано, что первый член данной прогрессии положительный и что сумма  $n$  членов, находящихся в середине этой прогрессии, равна  $0$ .

- (б) Разность прогрессии является положительной или отрицательной? Обоснуйте свой ответ.

Известно, что выполняется  $a_1 = 19 \cdot |d|$ .

- (в) Найдите число членов данной прогрессии.

Удаляют несколько членов из данной прогрессии, и образуется новая арифметическая прогрессия:  $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}$ .

Сумма членов новой прогрессии равна  $36$ .

- (г) Найдите  $d$ .

3. Ежедневная газета, которая распространяется только среди подписчиков, живущих в Хайфе или Тель-Авиве, должна доставляться к ним на дом каждый день до 6:00.

Редакция газеты провела опрос среди подписчиков, в котором спросила, получили ли они в определенный день газету вовремя.

В опросе участвовали все подписчики, и все они ответили на этот вопрос "да" или "нет".

Из результатов опроса следует, что вероятность случайным образом выбрать подписчика, который получил газету вовремя, из числа подписчиков, живущих в Хайфе, составляет  $\frac{3}{4}$ , а вероятность случайным образом выбрать живущего в Хайфе подписчика из числа подписчиков, получивших газету вовремя, равна  $\frac{5}{9}$ .

Обозначим как  $p$  вероятность того, что подписчик, случайно выбранный из всех подписчиков, живет в Хайфе.

Случайным образом выбирают одного из подписчиков.

- (а) Выразите при помощи  $p$  вероятность того, что выбранный подписчик живет в Тель-Авиве и получил газету вовремя.

Дано, что число подписчиков, которые живут в Тель-Авиве и не получили газету вовремя, в  $1.5$  раза больше, чем число подписчиков, которые живут в Тель-Авиве и получили газету вовремя.

- (б) Сколько процентов подписчиков получили газету вовремя?

Из числа подписчиков, которые не получили газету вовремя, случайным образом выбирают двух подписчиков.

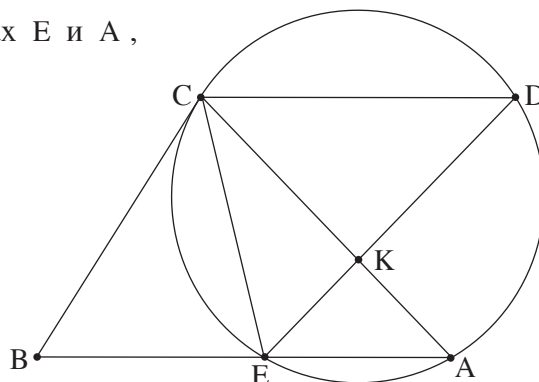
- (в) Какова вероятность того, что первый выбранный подписчик живет в Тель-Авиве, а второй живет в Хайфе?

В тот же день в редакцию газеты позвонили  $6$  подписчиков, не получивших вовремя газету.

- (г) Какова вероятность того, что не более  $4$  из них живут в Хайфе?

### Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Из точки  $B$ , расположенной вне окружности, провели прямую, касательную к окружности в точке  $C$ , и другую прямую, пересекающую окружность в точках  $E$  и  $A$ , как показано на чертеже.



Точка  $D$  – такая точка на окружности, что хорда  $CD$  параллельна хорде  $EA$ . Хорды  $ED$  и  $AC$  пересекаются в точке  $K$ .

(а) Докажите:  $\triangle CEB \sim \triangle DCE$ .

Дано:  $AK = 3$ ,  $ED = 7$ .

Обозначим площадь треугольника  $CEK$  как  $S$ .

(б) Выразите при помощи  $S$  площадь треугольника  $CKD$ .

Дано:  $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$ .

(в) Выразите при помощи  $S$  площадь треугольника  $CEB$ .

Точка  $O$  – центр данной окружности.

(г) Докажите:  $\sphericalangle COE = \sphericalangle SCE$ .

Дано:  $\sphericalangle CAE = 45^\circ$ .

(д) Объясните, почему точки  $O$ ,  $C$ ,  $E$  и  $K$  находятся на одной и той же окружности.

5. Дана трапеция  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ), вписанная в окружность.

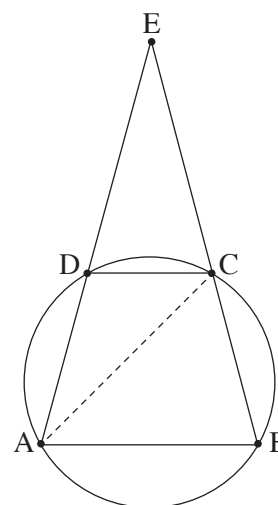
Продолжения сторон  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ , как показано на чертеже.

Дано:  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ .

Обозначим:  $AC = k$ ,  $\sphericalangle CDE = \alpha$ .

(а) (1) Найдите углы треугольника  $ACE$  (при необходимости выразите при помощи  $\alpha$ ).

(2) Выразите при помощи  $\alpha$  и  $k$  длины сторон  $AB$  и  $DC$ .



Дано, что площадь треугольника  $ABE$  в 3 раза больше площади треугольника  $DCE$ .

(б) Найдите величину угла  $\alpha$ .

(в) Найдите значение  $k$ , при котором длина медианы к стороне  $EC$  в треугольнике  $AEC$  равна  $\sqrt{7}$ .

### Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция:  $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x - 4)^2}$ ,  $0 < a < 4$  – параметр.

(а) Ответьте на вопросы подпунктов (1)–(5). При необходимости выразите свои ответы при помощи  $a$ .

- (1) Найдите область определения функции  $f(x)$ .
- (2) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных осям координат.
- (3) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $f(x)$  с осями координат.
- (4) Найдите координату  $x$  точки экстремума функции  $f(x)$  и определите ее тип.
- (5) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дана функция:  $g(x) = \frac{x^2}{(x - 4)^2}$ , определенная на той же области, что и функция  $f(x)$ .

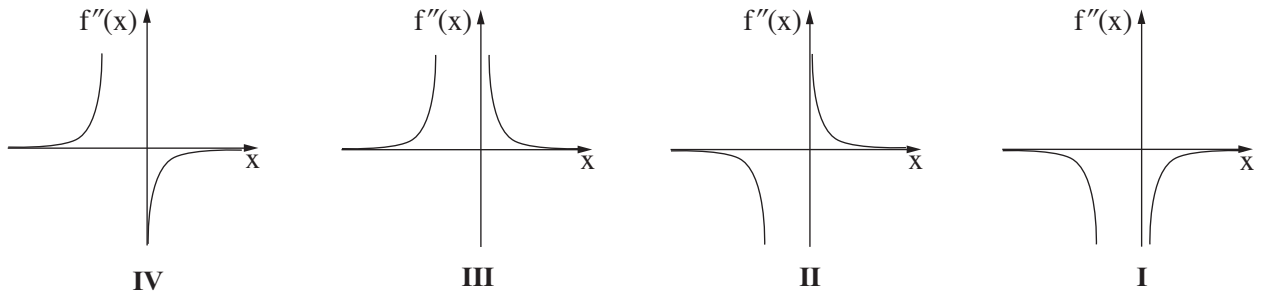
- (б) (1) Докажите, что график функции  $g(x)$  полностью расположен над графиком функции  $f(x)$ .
- (2) Выразите при помощи  $a$  площадь фигуры, заключенной между графиками функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , прямой  $x = 1$  и осью  $y$ .

7. Дана функция  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x}}$ .

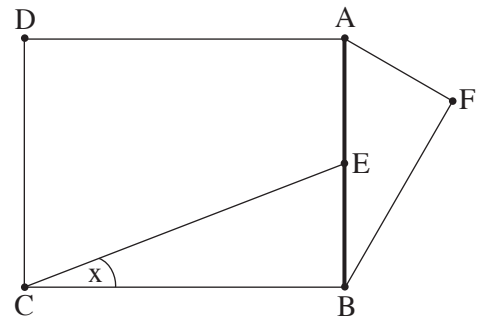
- (⌘) (1) Найдите область определения функции  $f(x)$ .
- (2) Пересекает ли график функции  $f(x)$  оси координат? Обоснуйте свой ответ.
- (3) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных осям координат.
- (4) Найдите области возрастания и убывания функции  $f(x)$ .

Дано, что у функции  $f(x)$  нет точек перегиба.

- (Ⓜ) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .
- (Ⓝ) Воспользуйтесь графиком функции  $f(x)$  и определите, какой из графиков I–IV в конце вопроса описывает вторую производную  $f''(x)$ . Обоснуйте свой ответ.
- (Ⓣ) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком второй производной  $f''(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x = 1$  и  $x = 2$ .



8. Точка  $E$  – это середина отрезка  $AB$ .  
 На отрезке  $AB$  построили прямоугольник  $ABCD$  и прямоугольный треугольник  $AFB$ ,  $\sphericalangle AFB = 90^\circ$ , как показано на чертеже.



Дано:  $\sphericalangle ECB = x$ ,  $\sphericalangle FAB = 2x$ .

Обозначим длину отрезка  $AB$  через  $h$ .

- (⌘) Какова возможная область значений  $x$ ? Объясните свой ответ.
- (Ⓜ) Выразите при помощи  $x$  и  $h$  разность между длиной отрезка  $CE$  и длиной отрезка  $AF$ .
- (Ⓝ) Найдите значение  $x$ , при котором разность между длиной отрезка  $CE$  и длиной отрезка  $AF$  будет минимальной.
- (Ⓣ) Для значения  $x$ , найденного вами в пункте (Ⓝ), найдите отношение между площадью прямоугольника  $ABCD$  и площадью треугольника  $AFB$ .

**Желаем успеха!**

**בהצלחה!**